

**MATEMÁTICAS**  
**EXAMEN RESUELTO**

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

**Opción A**

1. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) [2 puntos] Calcule, o indique por qué no es posible,  $A + B$ ,  $A \cdot B$ ,  $A + B^t$ ,  $C^2$ . (Nota:  $B^t$  denota la matriz traspuesta de  $B$ ).
- b) [1 punto] Calcule  $\det(C)$ . ¿Existe  $C^{-1}$ ? (En caso de que exista, no es necesario calcularla).

**Solución:**

- a) ■ No es posible calcular  $A + B$  porque las matrices son de distinto tamaño.

■

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

$$A + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$$

Como  $\det(C) \neq 0$ , existe la inversa de  $C$ .



2. a) [1 punto] De un triángulo rectángulo, sabemos que su hipotenusa mide  $\sqrt{5}$  cm y uno de sus catetos mide 1 cm. Calcule el otro cateto y los dos ángulos agudos del triángulo (Notas: los ángulos se pueden expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos).
- b) [1 punto] En el plano se consideran los puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (2, 1)$ . Calcule la ecuación explícita de la recta que pasa por ambos puntos.
- c) [1 punto] Sea  $r$  la recta de ecuación paramétrica

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Calcule la ecuación paramétrica de la recta  $s$  perpendicular a  $r$  que pasa por el punto  $(4, 5)$ .

**Solución:**

- a) Sea  $b$  la longitud del cateto a calcular. Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que  $b^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2$ , luego  $b^2 = 5 - 1 = 4$  y  $b = 2$  cm.  
Sea  $\alpha$  al ángulo opuesto al cateto de longitud 1. Por la definición de seno, se tiene que  $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ , luego  $\alpha = \arcsen(1/\sqrt{5}) = 26,5651^\circ$ .  
El otro ángulo agudo  $\beta$  cumple que  $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ , luego  $\beta = 90^\circ - 26,5651^\circ = 63,4349^\circ$ .
- b) Primero usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x - 1}{2 - 1}$$

Simplificando, se obtiene

$$\frac{y - 2}{-1} = \frac{x - 1}{1} \iff y - 2 = -(x - 1) \iff y = -x + 3.$$

- c) Un vector director de  $r$  es  $\vec{v} = (2, 3)$ , luego un vector director de cualquier recta perpendicular a  $r$  será  $\vec{u} = (-3, 2)$ . Una posible ecuación paramétrica de la recta pedida es

$$s : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



3. a) [1 punto] Estudie el dominio de las siguientes funciones

$$(i) \quad f(x) = \ln(1 + x^2), \quad (ii) \quad g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

( $\ln$  denota logaritmo neperiano).

b) [1 punto] Localice y clasifique los extremos relativos de  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  en  $(0, +\infty)$ .

c) [2 puntos] Calcule el área comprendida entre las gráficas de las curvas  $y = x^4$  e  $y = x^3$ .

**Solución:**

- a) ■ El dominio de  $f$  está formado por los puntos en los que  $1 + x^2 > 0$ , es decir, todo  $\mathbb{R}$ .  
■ El dominio de  $g$  está formado por los puntos donde  $1 - x^2 \geq 0$ . Resolvemos la inecuación:

$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Luego  $\text{Dom}g = [-1, 1]$ .

b) Calculamos la derivada de  $f$ , que es  $f'(x) = 1 - 1/x^2$ . Resolviendo  $1 - 1/x^2 = 0$  tenemos  $x = \pm 1$ . Como nos piden soluciones positivas, tomamos  $x = 1$ .

Para clasificar el extremos, calculamos  $f''(x) = 2/x^3$ . Se tiene que  $f''(1) = 2 > 0$ , luego en  $x = 1$  hay un mínimo relativo.

c) Calculamos los puntos de intersección de ambas curvas resolviendo la ecuación  $x^4 = x^3$ , cuyas soluciones son  $x = 0$  y  $x = 1$ . Entre 0 y 1, se tiene que  $x^3 \geq x^4$ , luego el área pedida es

$$A = \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - (0 - 0) = 0,05u^2,$$

donde  $u$  es la unidad de longitud usada.

**Opción B**

1. a) [1.5 puntos] Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, en función de  $x$ , el determinante de  $A$ . ¿Para qué valores de  $x$  existe  $A^{-1}$ ? (No hay que calcular la inversa).

- b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2y + z = -6 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

**Solución:**

- a) Calculamos el determinante por la regla de Sarrus.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + x \cdot 1 \cdot x - x \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot x \cdot 1 = x^2 - x - 2.$$

La matriz inversa de  $A$  existe si y solo si  $\det(A) \neq 0$ . Resolviendo la ecuación  $x^2 - x - 2 = 0$  tenemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Luego  $A$  es invertible si y solo si  $x \neq 2$  y  $x \neq -1$ .

- b) Escribimos la matriz ampliada del sistema y efectuamos operaciones elementales para triangular el sistema.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 + F_1}]{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & -16 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3 \leftarrow 2F_3 + F_2}]{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

Resolvemos el sistema triangular superior resultante:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ -8y - z = -16 \\ 5z = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación obtenemos  $z = 0$ . La segunda ecuación queda como  $-8y - 0 = -16$ , por lo que  $y = 2$ . Finalmente, la primera ecuación queda  $x + 3 \cdot 2 + 0 = 5$ , y despejando la  $x$  obtenemos  $x = -1$ . El sistema tiene una única solución, que es

$$x = -1, y = 2, z = 0.$$



2. a) [2 punto] Sean  $\vec{u} = (3, 4)$  y  $\vec{v} = (0, 4)$ . Calcule  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $|\vec{u}|$ , y el ángulo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . (Notas: el ángulo se puede expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos)
- b) [1 punto] Sea  $\alpha$  el ángulo del primer cuadrante tal que  $\text{sen } \alpha = 0,28$ . Calcule de forma razonada, y sin calcular el ángulo  $\alpha$ ,  $\text{cos } \alpha$  y  $\text{tg } \alpha$ . (Nota: use al menos 4 decimales en los cálculos).

**Solución:**

- a)
- $\vec{u} + \vec{v} = (3, 8)$
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16$ .
  - $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
  - Denotemos  $\alpha$  el ángulo formado por ambos vectores. De la fórmula  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$ , usando los resultados de los apartados anteriores y que  $|\vec{v}| = 4$ , tenemos

$$\cos \alpha = \frac{16}{5 \cdot 4} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 36,8699^\circ.$$

- b) De la relación  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ , se tiene  $\text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,28^2 = 0,9216$ . Como  $\alpha$  está en el primer cuadrante, su coseno es positivo, luego  $\text{cos } \alpha = \sqrt{0,9216} = 0,96$ , y por tanto

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,28}{0,96} \approx 0,2917.$$



3. a) [1 punto] Determine para qué valor o valores de  $a$ , la siguiente función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- b) [1 punto] Calcule la ecuación explícita de la recta tangente a la curva  $y = e^x$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

- c) [1 punto] Calcule

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/2 + x) - 1}{x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$$

( $\ln$  denota logaritmo neperiano).

- d) [1 punto] Calcule

$$(i) \int \sqrt{x} \, dx, \quad (ii) \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

### Solución:

- a) Por un lado se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + a = 1 + a.$$

Por el otro

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0.$$

Luego para que  $f$  sea continua, se tiene que cumplir que  $1 + a = 0$ , y por tanto  $a = -1$ . En este caso,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$  y  $f$  es continua en  $a$ .

Si  $x < 1$ ,  $f$  es continua en  $x$  por ser una función polinómica. Si  $x > 1$ ,  $f$  es continua en  $x$  por que el logaritmo neperiano es una función continua en su dominio.

- b) Se tiene que  $y'(x) = e^x$ , luego la pendiente de la recta tangente es  $m = y'(0) = e^0 = 1$ . Aplicando la ecuación punto-pendiente, y usando que  $y(0) = 1$ , se tiene

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1.$$

- c) (i) El límite presenta una indeterminación del tipo  $0/0$ . Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/2 + x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 + x)}{1} = \cos(\pi/2 + 0) = 0.$$

- (ii) El límite presenta una indeterminación del tipo  $\infty/\infty$ . Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

También se puede hacer por el orden los infinitos que aparecen en la expresión.

- d) (i) Obtenemos una primitiva escribiendo  $\sqrt{x} = x^{1/2}$  y aplicando la regla de las potencias:

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} x^{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

- (ii) Obtenemos la integral definida aplicando la regla de Barrow, y usando que una primitiva de  $\sin x$  es  $-\cos x$ :

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$