MATEMÁTICAS

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

1. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) [2 puntos] Calcule, o indique por qué no es posible, $A+B$, $A \cdot B$, $A+B^t$, C^2. (Nota: B^t denota la matriz traspuesta de B).

   b) [1 punto] Calcule $\det(C)$. ¿Existe C^{-1}? (En caso de que exista, no es necesario calcularla).

2. *a*) [1 punto] De un triángulo rectángulo, sabemos que su hipotenusa mide $\sqrt{5}$ cm y uno de sus catetos mide 1 cm. Calcule el otro cateto y los dos ángulos agudos del triángulo (Notas: los ángulos se pueden expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos).

   b) [1 punto] En el plano se consideran los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (2, 1)$. Calcule la ecuación explícita de la recta que pasa por ambos puntos.

   c) [1 punto] Sea r la recta de ecuación paramétrica

$$r : \begin{cases} x &= \quad 1 + 2t \\ y &= -2 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

   Calcule la ecuación paramétrica de la recta s perpendicular a r que pasa por el punto $(4, 5)$.

3. *a*) [1 punto] Estudie el dominio de las siguientes funciones

$$\text{(i)} \quad f(x) = \ell n\,(1 + x^2), \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

   (ℓn denota logaritmo neperiano).

   b) [1 punto] Localice y clasifique los extremos relativos de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ en $(0, +\infty)$.

   c) [2 puntos] Calcule el área comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^4$ e $y = x^3$.

Opción B

1. *a*) [1.5 puntos] Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, en función de x, el determinante de A. ¿Para qué valores de x existe A^{-1}? (No hay que calcular la inversa).

b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y + z & = & 5 \\ 2x - 2y + z & = & -6 \\ -x + y + 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

2. *a*) [2 punto] Sean $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (0, 4)$. Calcule $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$, y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (Notas: el ángulo se puede expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los cálculos)

b) [1 punto] Sea α el ángulo del primer cuadrante tal que $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}28$. Calcule de forma razonada, y sin calcular el ángulo α, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$. (Nota: use al menos 4 decimales en los cálculos).

3. *a*) [1 punto] Determine para qué valor o valores de a, la siguiente función es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ \ell n\, x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

b) [1 punto] Calcule la ecuación explícita de la recta tangente a la curva $y = \mathrm{e}^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

c) [1 punto] Calcule

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi/2 + x) - 1}{x}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ell n\, x}$$

(ℓn denota logaritmo neperiano).

d) [1 punto] Calcule

$$\text{(i)} \quad \int \sqrt{x}\, \mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x$$